

PENGUNAAN METODE EULER PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA PADA RANGKAIAN LISTRIK SERI LC

Sri Maiyena

*Program Studi Pendidikan Fisika STAIN Batusangkar
Jl. Sudirman No. 137 Kuburajo Lima Kaum Batusangkar
Email: qalbu_86@yahoo.com*

ABSTRAK

The use of analytical methods in solving some forms of differential equations, specifically the non-linear differential is difficult to conduct. The alternative is by using the numerical method. The numerical method used is the euler method which applies the second order differential equation on an LC series circuit. By using fortran program, the strong current and charge are obtained from $t=0$ and $t=2.5$ second.

Key words: Differential Equation, LC series circuit, numerical method, euler method.

PENDAHULUAN

Persamaan differensial merupakan persamaan yang menghubungkan suatu besaran dengan perubahannya. Persamaan differensial dituliskan dengan :

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}, t\right) = 0$$

Persamaan ini memiliki banyak ragam dan jenis mulai dari yang mudah diselesaikan hingga yang sulit diselesaikan, mulai dari yang sederhana sampai yang sangat kompleks. Pada umumnya, penyelesaian persamaan differensial menggunakan metode analitik. Akan tetapi pada beberapa bentuk persamaan differensial, khususnya differensial non-linier, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan. Akibatnya, metode numerik dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan.

Metode numeric yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, antara lain: metode Euler, metode pendekatan dengan deret Taylor, metode runge-kutta dan metode-metode prediktor-korektor seperti metode Adam Moulton. Pada tulisan ini akan

dibahas metode numeric dengan menggunakan metode euler. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial secara numeric ketika nilai fungsi pada keadaan awal diketahui.

SISTEM FISIS YANG DITINJAU

Sistem fisis yang akan ditinjau adalah rangkaian listrik seri LC yang diberi tegangan bolak-balik $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta_0)$. Seperti ditunjukkan pada gambar 1.

Dalam hal ini: $V_L + V_C = V(t)$ (1)

Dengan $V_L = L \frac{di}{dt}$ dan $V_C = \frac{q}{C}$,

dimana $i = \frac{dq}{dt}$

Sehingga persamaannya menjadi:

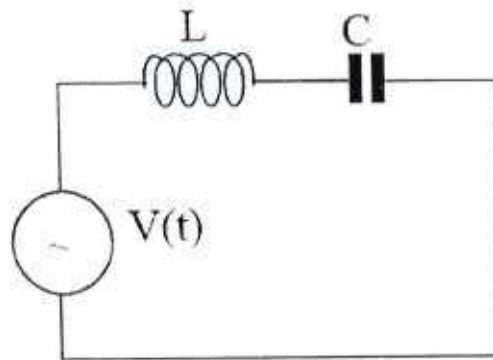
$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = V_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (2)$$

Dimana,

L = induktansi listrik (Hendri)

C = kapasitor (Farad)

q = muatan (coulomb)



Gambar 1. Rangkaian listrik Seri LC

METODE PENELITIAN

Dari masalah sistem fisis yang ditinjau, persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial orde dua. Penyelesaian persamaan diferensial orde dua diselesaikan secara komputasi dengan menggunakan persamaan euler. Persamaan differensial berbentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

Dengan $f(x, y)$ adalah fungsi yang diberikan oleh masalah yang bersangkutan sehingga diketahui bentuk eksplisitnya dan $y(x)$ adalah fungsi yang akan dicari pada sebaran $x \geq x_0$. Dalam kasus ini, masalah untuk menemukan $y(x)$ dipengaruhi oleh adanya persyaratan bahwa pada saat awal $x=x_0$ maka nilai fungsi pada keadaan tersebut adalah $y(x_0)=y_0$ dengan y_0 berupa satu nilai yang diberikan sejak awal. Penyelesaian masalah tersebut dengan menggunakan metode euler yaitu ruas kiri, yaitu turunan pertama dari y didekati dengan dua titik maju. Sehingga

$$\frac{d^2 y}{dt} \approx \frac{y_{n+1} + y_n}{h} \quad (4)$$

Sehingga diperoleh hubungan rekursif dengan menggunakan pendekatan nilai awal (x_0, y_0) maka nilai-nilai y berikutnya dapat diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (5)$$

Dengan $y_n \equiv y(n)$ dan ukuran langkah $h = x_{n+1} - x_n$. Dengan ungkapan tersebut maka saat y_0 diketahui dari syarat awal maka y_1 akan dapat dihitung. Kemudian ketika y_1 sudah diperoleh maka y_2 dapat dihitung dan apabila diteruskan maka $y_3, y_4, \dots, y_n$ akan dapat diperoleh. Ini berarti nilai $y(x)$ sudah berhasil diperoleh untuk sebarang nilai x yang akan ditentukan.

Penyelesaian dari persamaan diferensial orde dua tersebut, harus diubah menjadi persamaan diferensial orde satu. Hal ini dimaksudkan agar bisa diselesaikan dengan metode euler.

Dengan mengingat bahwa

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{di}{dt} \quad (6)$$

Sehingga persamaan (2) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{di}{dt} = (V_0 \cos(\omega t + \theta_0) - \frac{q}{C}) / L \quad (7)$$

Dan metode Euler memberikan

$$i_{n+1} = i_n + h \frac{V_0 \cos(\omega t + \theta_0) - q_n / C}{L} \quad (8)$$

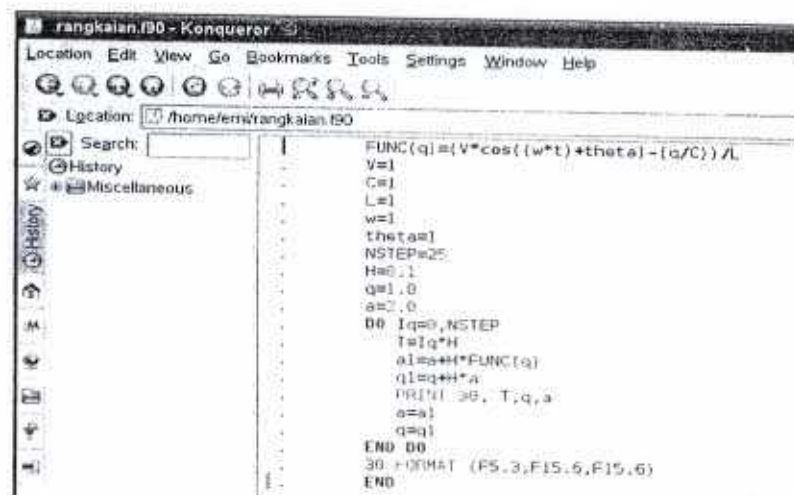
Sedangkan dari $\frac{dq}{dt} = i$ memberikan

$$q_{n+1} = q_n + h i_n \quad (9)$$

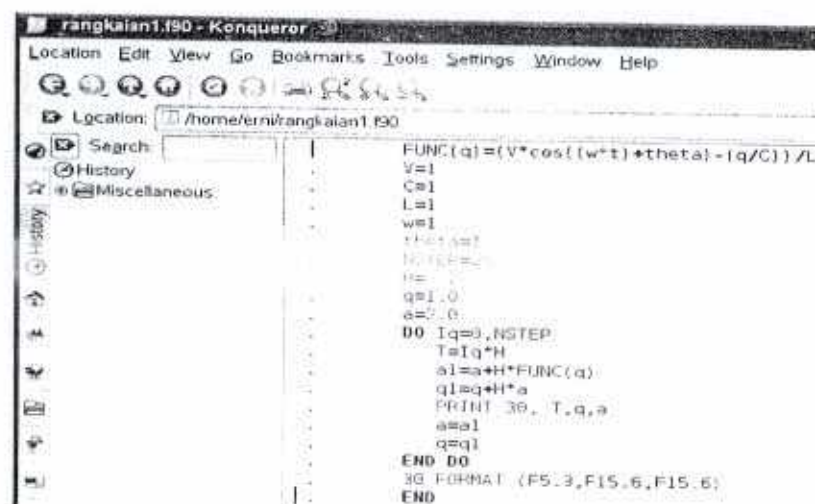
Jadi dilakukan dua kali perhitungan rekursif, dengan dua nilai awal yaitu $i(0) = i_0$ dan $q(0) = q_0$, yaitu nilai pada saat $t=0$. Misalkan diberikan nilai awal $i_0=2.0$ dan $q_0=1.0$.

Program fortran pada masalah rangkaian listrik di bawah ini untuk menghitung nilai-nilai $i(t)$ dan $q(t)$ mulai dari $t=0$ sampai $t=2.5$. Arus disimbolkan dengan variable a .

Hal ini karena symbol I digunakan pada baris ke 11. Pada makalah ini, penulis menggunakan dua buah ukuran langkah yaitu $h=0.1$ dan $h=0.2$. Gambar 1 menggunakan ukuran langkah $h=0.1$ dan dengan 25 jumlah langkah. Gambar 2 menggunakan ukuran langkah $h=0.2$ dan dengan jumlah langkah yang sama dengan gambar 1.



Gambar 2. Program fortran Dengan $h=0.1$

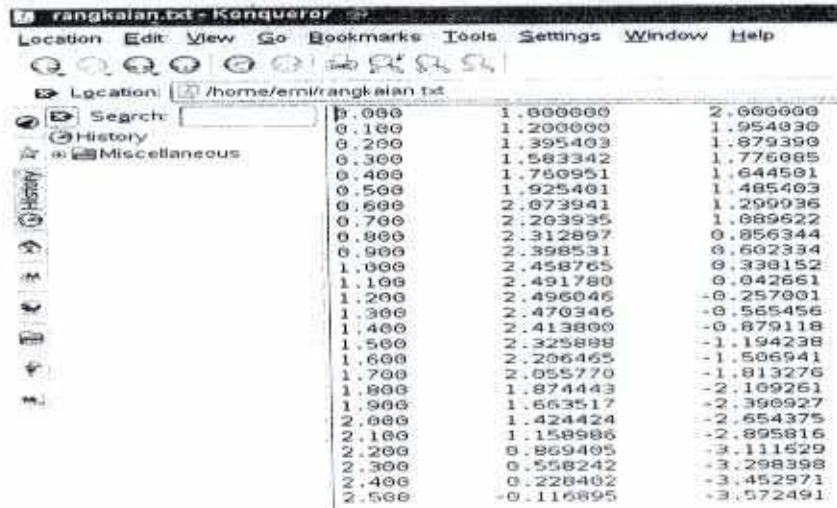


Gambar 3. Program Fortran Dengan $H=0.2$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan memasukkan nilai tegangan (V)= 1 volt, kapasitor (C)= 1 Farad, induk-

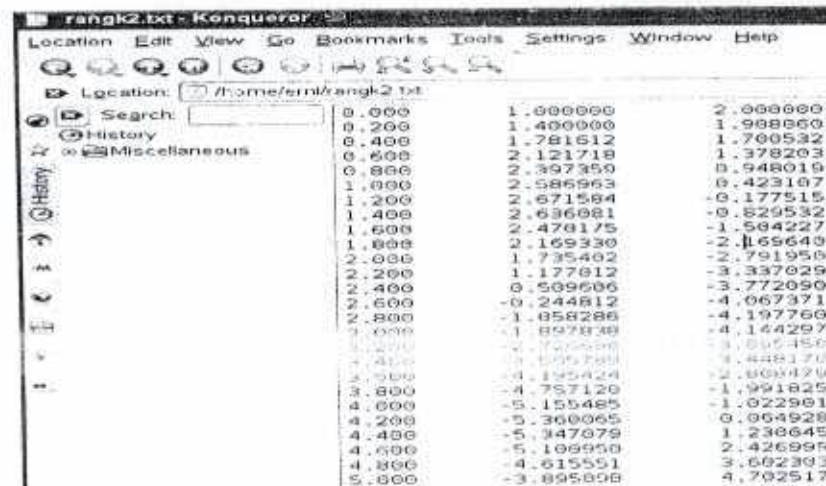
tansi (L)=1, omega (ω)=1 serta theta (θ) juga 1 pada $h=0.1$, hasil perhitungannya ditampilkan pada gambar 4.



t	q	i
0.000	1.000000	2.000000
0.100	1.200000	1.954930
0.200	1.395403	1.879350
0.300	1.583342	1.776885
0.400	1.750951	1.644501
0.500	1.925401	1.485403
0.600	2.073941	1.299936
0.700	2.203935	1.089622
0.800	2.312897	0.856344
0.900	2.398531	0.602334
1.000	2.458765	0.338152
1.100	2.491780	0.042661
1.200	2.496046	-0.257001
1.300	2.470346	-0.565456
1.400	2.413800	-0.879118
1.500	2.325888	-1.194238
1.600	2.206465	-1.506941
1.700	2.055770	-1.813276
1.800	1.874443	-2.109281
1.900	1.663517	-2.390927
2.000	1.424424	-2.654375
2.100	1.158988	-2.895816
2.200	0.869405	-3.111629
2.300	0.558242	-3.298398
2.400	0.228402	-3.452971
2.500	-0.116895	-3.572491

Gambar 4. Hasil Perhitungan Pada $h=0.1$

Adapun untuk $h=0.2$, diperoleh hasilnya seperti Gambar 5.



t	q	i
0.000	1.000000	2.000000
0.200	1.400000	1.988060
0.400	1.781612	1.700532
0.600	2.121718	1.378203
0.800	2.397350	0.948019
1.000	2.586963	0.423167
1.200	2.671584	-0.177515
1.400	2.636081	-0.829532
1.600	2.478175	-1.504227
1.800	2.169330	-2.165649
2.000	1.735402	-2.791950
2.200	1.17812	-3.337029
2.400	0.509606	-3.772090
2.600	-0.244812	-4.067371
2.800	-1.058286	-4.197760
3.000	-1.857848	-4.144297
3.200	-2.555590	-3.905456
3.400	-3.057889	-3.488170
3.600	-3.35424	-2.808479
3.800	-3.475120	-1.991825
4.000	-3.35485	-1.022901
4.200	-3.000665	0.064928
4.400	-2.447079	1.238645
4.600	-1.69950	2.426999
4.800	-0.615551	3.602393
5.000	-3.895098	4.792517

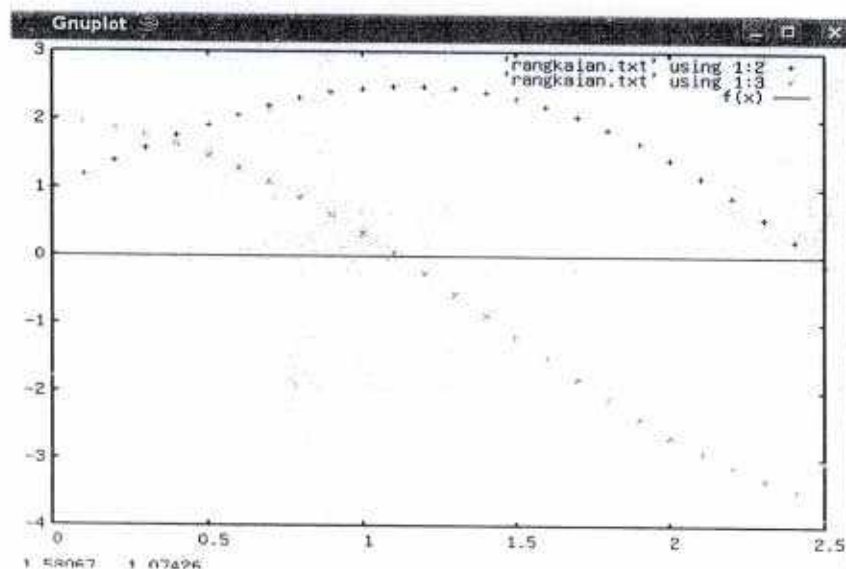
Gambar 5. Hasil Perhitungan Pada $h=0.2$

Pada hasil ini, kolom 1 merupakan t (waktu), kolom 2 muatan (q) sedangkan kolom 3 kuat arus listrik (i). Dari hasil perhitungan terlihat bahwa pada $h=0.1$ dengan

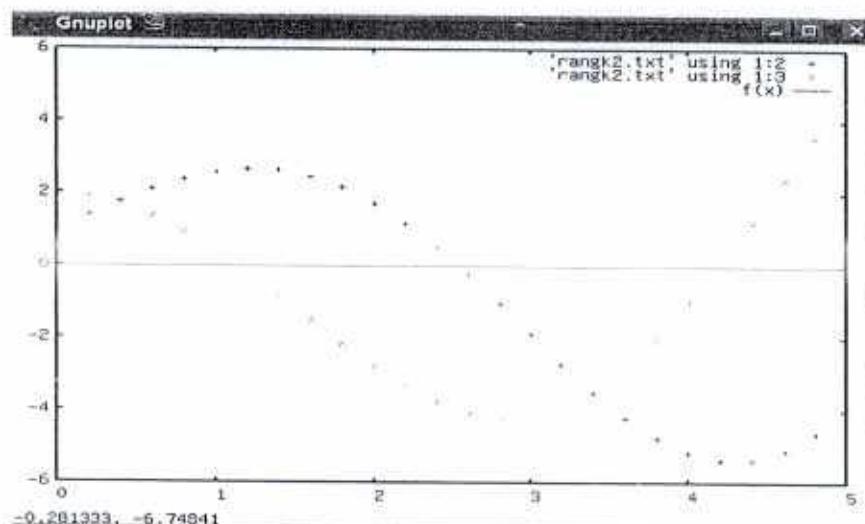
Nstep=25, besarnya muatan dihitung dari $t=0$ sampai $t=2.5$, sedangkan pada $h=0.2$ dengan Nstep yang sama, besarnya muatan dihitung dari $t=0$ sampai $t=5.0$. Dari gambar tersebut

terlihat adanya perbedaan hasil antara $h=0.1$ dengan $h=0.2$. Dari hasil perhitungan terlihat bahwa ukuran langkah yang lebih kecil lebih teliti dibandingkan ukuran langkah yang lebih besar.

Dari nilai awal yang dimasukkan dan dengan harga tetapan pada tegangan, kapasitor, induktansi, omega serta theta, dapat dibuatkan grafiknya seperti Gambar 6.



Gambar 6. Grafik q (muatan) Versus t (waktu) Dan I (kuat arus) Versus t (waktu) dengan $h=0.1$



Gambar 7. Grafik q (muatan) Versus t (waktu) dan I (kuat arus) Versus t (waktu) Pada $H=0.2$

Pada Gambar 7, grafik bintang yang berwarna merah merupakan grafik muatan versus waktu, sedangkan grafik bintang yang berwarna biru merupakan grafik kuat arus versus waktu. Dari grafik ini terlihat bahwa dengan pengambilan step size (h) yang lebih kecil akan lebih teliti dibandingkan pengambilan step size (h) yang lebih besar.

KESIMPULAN DAN SARAN

Metode euler dapat dijadikan sebagai penyelesaian persamaan orde dua secara komputasi. Persamaan diferensial orde dua ini sulit dibuktikan secara analitik. Penyelesaian persamaan orde dua ini juga dapat diselesaikan dengan metode Ringe Kutta. Pengambilan ukuran langkah (h) yang lebih kecil memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan pengambilan ukuran langkah (h) yang lebih besar.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

- Boas ML 1983. *Mathematical Methods in The Physical Sciences*. John Wiley & Sons. Newyork.
- Chivers ID and Jane S. 1990. *Interactive Fortran 77 a Hands on Approach. 2nd Edition*. University of London Computer Centre. London.
- Fachruddin I. 2006. *Metode Numerik I*. Jurusan Fisika Universitas Indonesia. Jakarta.
- Koonin SE and Dawn CM. 1990. *Computational Physics. Fortran Version*. Westview Press. Canada.
- Murjono. 2001. *Mekanika*. FMIPA Intitut Teknologi Bandung. Bandung.
- Nurwantoro P. 2008. *Petunjuk Praktikum Fisika Komputasi*. FMIPA Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.
- Supriyanto. 2006. *Metode Euler*. Jurusan Fisika Universitas Indonesia. Jakarta.