Jurnal Sainstek Vol. II No. 1: 76-86, Juni 2010 ISSN: 2085-8019

KEKONVERGENAN BARISAN INFINITESIMAL

Dona Afriyani

Program Studi Tadris Matematika STAIN Batusangkar
Jl. Sudirman No. 137 Kuburajo Lima Kaum Batusangkar, Sumatera Barat 27213

ABSTRACT

This article was to find descript methode theory with number of Sequences. Base on theory has found the relationships it, are if $\{X_{nk}\}, 1 \le k \le k_n, n \ge 1$ has a free infestimal sequences line each other, then number of intestimal konvergencies with distribution of free variable in a function $\exp\left[i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right\} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right]$ at conditions.

Key words: infestimal sequences, convergen, characteristic of function

PENDAHULUAN

Probabilitas dan Statistika semakin memainkan peranan dalam kehidupan masyarakat, terutama setelah perkembangan yang pesat tentang analisis data dan penggunaan komputer untuk menganalisis data. Statistika adalah suatu ilmu yang mempelajari tentang pengumpulan data, penyajian data, pengolahan data, dan analisis data serta penarikan kesimpulan sebagian data terhadap populasi induknya. Data yang dimaksudkan dalam pengertian Statistika di atas merupakan sejumlah nilai dari variabel-variabel yang terlibat dalam sebuah penelitian. Variabel-variabel ini selanjutnya dikenal dengan istilah variabel acak. Peranan Statistika dalam penelitian kuantitatif yaitu sebagai alat untuk menganalisis data sehingga diperoleh kesimpulan penelitian. Sebelum dilakukan teknik analisis data perlu dilakukan beberapa uji statistik untuk mengidentifikasi fungsi distribusi dari variabel-variabel yang terlibat dalam penelitian.

Misalkan terdapat sebuah barisan dengan n buah variabel acak, yang dinotasikan dengan $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Kita sering mengalami kesulitan dalam mengidentifikasi fungsi distribusi dari variabel acak tersebut. Persoalan ini dapat diselesaikan dengan memanfaatkan teorema limit pusat, yaitu dengan melihat fungsi distribusi pendekatan dari barisan variabel acak yang tidak diketahui secara jelas fungsi distribusinya. Pernyataan teorema limit pusat (Laha, 1979: 287), yaitu:

Misalkan $\{X_n\}$ adalah barisan acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan $0 < \mathrm{var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$ Misalkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Maka untuk setiap $x \in \Re$.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} \le x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Teorema limit pusat di atas menyatakan bahwa fungsi distribusi dari $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}}$ semakin lama semakin mirip dengan fungsi distribusi normal baku, dengan syarat $X_1, X_2, \cdots, X_n$ saling bebas dan berdistribusi identik. Berdasarkan teorema limit pusat ini, maka sebelum melakukan teknik analisis data perlu dilakukan uji kenormalan data untuk mengidentifikasi apakah variabel penelitian berdistribusi normal atau tidak. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, para peneliti dewasa ini sudah melakukan penelitian yang melibatkan sejumlah variabel yang lebih kompleks. Sebagai contoh, berikut ini akan disajikan sebuah ilustrasi tentang variabel-variabel yang mungkin terlibat dalam penelitian di bidang ekonomi (tabel 1).

Tabel 1. Variabel-variabel penelitian di bidang ekonomi

No	Kabupaten /Kota	Sektor Pendapatan Regional								
	Populasi 1	X_1								
		X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{11}
1	Kab. Pasaman	X_{111}	X_{121}	X_{131}	X_{141}	X_{151}	X_{161}	X_{171}	X_{181}	X_{191}
2	Kab. Agam	X_{112}	X_{122}	X_{132}	X_{142}	X_{152}	X_{162}	X_{172}	X_{182}	X_{192}
3	Kab. 50 Kota	X_{113}	X_{123}	X_{133}	X_{143}	X_{153}	X_{163}	X_{173}	X_{183}	X_{193}
4	Kota Padang Panjang	X_{114}	X_{124}	X_{134}	X_{144}	X_{154}	X_{164}	X_{174}	X_{184}	X_{194}
5	Kota Bukittinggi	X_{115}	X_{125}	X_{135}	X_{145}	X_{155}	X_{165}	X_{175}	X_{185}	X_{195}
6	Kota Payakumbuh	X_{116}	X_{126}	X_{136}	X_{146}	X_{156}	X_{166}	X_{176}	X_{186}	X_{196}
	Populasi 2	X_2								
		X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}
1	Kab. Solok	X_{211}	X_{221}	X_{231}	X_{241}	X_{251}	X_{261}	X_{271}	X_{281}	X_{291}
2	Kab. Sawahlunto	X_{212}	X_{222}	X_{232}	X_{242}	X_{252}	X_{262}	X_{272}	X_{282}	X_{292}
3	Kab. Tanah Datar	X_{213}	X_{223}	X_{233}	X_{243}	X_{253}	X_{263}	X_{273}	X_{283}	X_{293}
4	Kota Solok	X_{214}	X_{224}	X_{234}	X_{244}	X_{254}	X_{264}	X_{274}	X_{284}	X_{294}
5	Kota Sawahlunto	X_{215}	X_{225}	X_{235}	X_{245}	X_{255}	X_{265}	X_{275}	X_{285}	X_{295}

Keterangan: Populasi 1: wilayah pembangunan I; Populasi 2: wilayah pembangunan III

Dimana : X_{i1} = : Sektor Pertanian: X_{i2} = : Sektor Pertambangan dan Penggalian; X_{i3} = : Sektor Industri Pengolahan; X_{i4} = : Sektor Listrik, Gas dan Air Bersih; X_{i5} = : Sektor Bangunan/Kontruksi; X_{i6} = : Sektor Perdangan, Hotel, dan Restoran; X_{i7} = : Sektor Pembangunan dan Komunikasi; X_{i8} = : Sektor Lembaga keuangan, Sewa Bangunan dan Jasa Perusahaan; X_{i9} = : Sektor Jasa-jasa; X_{ijk} = : Nilai Produk Domestik Regional Bruto wilayah ke-I, sektor ke-j, dan daerah ke-k, Dengan; $i = 1, 2; j = 1, 2, \ldots, 9; k = 1, 2, \ldots, n_i$ dimana $n_1 = 1, 2, \ldots, 6$ dan $n_2 = 1, 2, \ldots, 5$. Yang mana Nilai Produk Domestik Regional Bruto daerah ke-k saling bebas

Variabel-variabel di atas dapat disajikan dalam sebuah barisan, yaitu:

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k_1},$$
$$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2k_2},$$
$$X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nkn},$$

Jika, $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} P\{|X_{nk}| \ge \varepsilon\} = 0, \ \forall \varepsilon > 0$

maka barisan ini disebut dengan barisan infinitesimal (Laha, 1979:295) ....(1)

Misalkan $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}, n \ge 1$

merupakan jumlah barisan variabel acak dari barisan infinitesimal. Jika barisan infinitesimal ini memenuhi kondisi berikut;

1. Barisan infinitesimal saling bebas baris demi baris
2. Variansi $(X_{nk}) = \mathrm{var}(X_{nk}) = \sigma^2_{nk} < \infty$
3. $\max_{i\le k\le k_n} \sigma^2_{nk} \to 0, n \to \infty$
4. $\sum_{k=1}^{k_n} \sigma^2_{nk} \le C < \infty$, untuk semua $n \ge 1$, dimana C > 0 adalah konstanta.

Untuk penulisan seterusnya, keempat kondisi di atas ditulis sebagai kondisi 1. Selanjutnya penulis tertarik untuk mengetahui fungsi distribusi dari jumlah barisan infitesimal yang memenuhi kondisi 1. Namun penelitian ini dibatasi untuk mengetahui kemanakah jumlah barisan infinitesimal yang memenuhi kondisi 1 tersebut konvergen?

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Metode yang digunakan adalah metode deskripsi dengan analisis teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandasan pada studi kepustakaan. Dalam melakukan penelitian ini, penulis memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan dan mengaitkan teori-teori yang didapat dengan permasalahan yang dihadapi sebagai penunjang untuk menjawab permasalahan. Adapun langkah kerja dari penelitian ini adalah:

1. Melihat ekivalensi dari definisi barisan infinitesimal
2. Melakukan pemusatan terhadap jumlah barisan infinitesimal
3. Menentukan kekonvergenan barisan yang telah dipusatkan pada langkah 2.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Variabel Acak

Barisan infinitesimal merupakan barisan variabel acak. Menurut Syafriandi (1999: 113) variabel acak adalah suatu fungsi dari ruang sample ke himpunan bilangan riil. Barisan tersebut merupakan barisan yang saling bebas baris demi baris. Istilah saling bebas didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1: Variabel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dikatakan saling bebas jika $P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le x_i\}$ (Chow, 1988:54)

Fungsi Distribusi

Definisi 2: Misalkan X suatu variabel acak, fungsi distribusi dari X didefinisikan sebagai; $F_X(x) = P(X \le x)$, untuk setiap $x \in \Re$. (Dudewicz,1995:82). Fungsi distribusi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

a. $F_X(x)$ tidak turun; yaitu jika $x \le y$, maka $F_X(x) \le F_X(y)$

b. $F_X(x)$ kontinu dari kanan; yaitu $\lim_{h\to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$ untuk setiap $x \in \Re$

c. $F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

d. $F_X(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_X(+\infty) = 1$

Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik memepunyai peranan penting dalam menjawab permasalahan yang dihadapi. Adapun Laha (1979:141) menyatakan bahwa fungsi karakteristik φ dari variabel acak X didefinisikan sebagai:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

Sifat fungsi karakteristik seperti terlihat dalam teorema berikut;

Teorema 1: Misalkan X dan Y variabel acak yang saling bebas, maka $\varphi_{x+y}(t) = \varphi_x(t).\varphi_y(t)$ (Gupta, 1982:319).

Salah satu jenis fungsi karakteristik yang dibicarakan adalah fungsi karakteristik terbagi tak hingga. Yang dijelaskan seperti definisi 3 dan teorema 2 berikut:

Definisi 3: Fungsi karakteristik φ dikatakan terbagi tak hingga jika untuk setiap n positif dimana $n \in N$, ada fungsi karakteristik φ_n sedemikian sehingga $\varphi = [\varphi_n]^n$ (Laha, 1979:237).

Teorema 2: (Representasi Levy-Khintchine)

Fungsi karakteristik φ terbagi tak hingga jika dan hanya jika $\ln \varphi(t)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\ln \varphi(t) = i\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right\} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \quad (2)$$

Dimana $\alpha \in \Re$, G terbatas, tak turun dan kontinu kanan pada **R**, sehingga $G(-\infty) = 0$ dan $G(\infty) < \infty$. Nilai integral di x = 0 didefinisikan dengan kekontinuan sebagai:

$$\left. \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \right|_{x=0} = -\frac{t^2}{2}$$

Selanjutnya, α dan G(x) ditentukan secara tunggal oleh $\varphi(t)$. (Laha,1979:239)

Untuk penulisan selanjutnya digunakan notasi: $\varphi(t) = \ln \varphi(t)$.

Jenis Kekonvergenan Dalam Statistika

Beberapa jenis kekonvergenan dalam statistika yang menjasi konsep dasar dalam pembahasan nantinya yaitu kekonvergenan secara lemah, kekonvergenan secara lengkap dan kekovergenan dalam distribusi. Yang semuanya dijelaskan seperti terlihat dalam definisi-definisi berikut:

Definisi 4: Misalkan $\{F_n\}$ barisan yang terbatas seragam, tak turun dan kontinu kanan di R F_n dikatakan konvergen secara lemah ke fungsi F yang terbatas, tak turun dan kontinu kanan di **R** jika $F_n(x) \to F(x)$ untuk $n \to \infty$ pada setiap x titik kontinu dari F.

Notasi: $F_n \xrightarrow{w} F$ (Laha,1979:131)

Definisi 5: Misalkan $\{F_n\}$ barisan fungsi yang terbatas seragam, tak turun, dan kontinu kanan di **R.** F_n dikatakan konvergen secara lenglap ke F jika:

i. $F_n \xrightarrow{w} F$

ii. $F_n(\pm\infty) \to F(\pm\infty)$, untuk $n \to \infty$.

Notasi: $F_n \xrightarrow{c} F$ (Laha,1979:131)

Definisi 6: Misalkan F_n dan F masing-masing merupakan fungsi distribusi dan variabel acak X_n dan X. X_n dikatakan konvergen dalam distribusi ke X jika: $F_n \xrightarrow{c} F$

Notasi: $X_n \xrightarrow{d} X$ (Laha,1979:132)

Selanjutnya dibutuhkan beberapa teorema untuk mendapatykan bentuk ekivalen dari fungsi yang konvergen secara lengkap.

Teorema 3: (Teorema Helly-Bray).

Misalkan g fungsi bernilai riil dan kontinu pada [a,b] dan $\{F_n\}$ barisan fungsi terbats seragam, tidak turun dan kontinu kanan yang konvergen secara lemah ke fungsi F pada [a,b] titik kontinu dari F, maka

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g\, dF_n = \int_a^b g\, dF_n \text{ (Chow, 1988:256)}$$

Teorema 4: (Teorema Perluasan Helly-Bray).

Misalkan g fungsi bernilai riil, terbats dan kontinu di **R.** $\{F_n\}$ barisan fungsi terbatas seragam, tidak turun, dan kontinu kanan yang konvergen secara lengkap ke fungsi F di **R**, maka $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g\, dF_n = \int_{-\infty}^{\infty} g\, dF_n$ (Laha, 1979:137)

Beberapa Teorema Tentang Barisan Infinitesimal

Teorema 5: Kondisi barisan infinitesimal (1) ekivalen dengan dua kondisi di bawah ini;

a. $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}(x)=0$, atau

b. $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le k_n}|\varphi_{nk}(t)-1|=0$, secara seragam pada setiap interval t hingga $|t|\le T, \forall T>0$, dimana φ_{nk} adalah fungsi karakteristik dari X_{nk}.(Chow, 1988:434).

Teorema ini memberikan bentuk lain dari definisi barisan infinitesimal seperti terlihat pada (1). Bentuk ini nantinya yang akan terpakai dalam pembahasan.

Teorema 6: Misalkan m_{nk} adalah median dari X_{nk} dan $\alpha_{nk}=\int_{x<y}x\,dF_{nk}(x)$. Misalkan barisan variabel acak pada barisan infinitesimal, maka;

a. $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le k_n}|m_{nk}|=0$

b. $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le k_n}|\alpha_{nk}|=0$ (Laha, 1979:297)

Karena $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le k_n}|\alpha_{nk}|=0$,maka $\{\widetilde{X}_{nk}\}$ merupakan barisan infinitesimal apabila $\{X_{nk}\}$ infinitesimal. Akhirnya, melalui teorema 8 $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le k_n}|\varphi_{nk}(t)-1|=0$ secara seragam pada interval $|t|\le T,\forall T>0$.

Teorema 7: Misalkan $\{X_{nk}\}$ barisan variabel cak yang infinitesimal, $\prod_{k=1}^{k_n}|\varphi_{nk}|\to|\varphi|$, untuk $n\to\infty$, dimana φ kontinu pada **R**, maka

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{k_n}\left[\ln\varphi_{nk}(t)-it\alpha_{nk}-\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)d\widetilde{F}_{nk}(x)\right]\right\}=0,$$

secara seragam pada setiap interval-t hingga (Laha, 1979: 305).

Hasil

Misalkan $\{X_{nk}\}$ merupakan barisan infinitesimal yang didefinsikan pada (1) dan $S_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}$, $n\ge 1$ merupakan jumlah barisan infinitesimal, dan:

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{1+y^2}dF_{nk}(y+\alpha_{nk}), x\in\Re$$

Dengan $\alpha\in\Re$, terbatas, tak turun, dan kontinu kanan pada **R**, sehingga $G(-\infty)=0$ dan $G(\infty)<\infty$. Menurut teorema 5 dan 6, $G_n(x)$ merupakan bentuk pemusatan dari jumlah barisan infinitesimal. Dimana untuk γ yang tetap tetapi sebarang, $0<\gamma<\infty$, didefinisikan:

$$\alpha_{nk}=\alpha_{nk}(\gamma)=\int_{|x|<\gamma}x\,dF_{nk}(x)$$

$$\widetilde{F}_{nk}(x)=F_{nk}(x+\alpha_{nk})$$

$$\widetilde{\varphi}_{nk}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,d\widetilde{F}_{nk}(x)$$

Selanjutnya akan dicari kekonvergenan $G_n(x)$. Menurut teorema 7,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{k_n}\left[\ln\varphi_{nk}(t)-it\alpha_{nk}-\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)d\widetilde{F}_{nk}(x)\right]\right\}=0$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left[it\alpha_{nk}+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)d\widetilde{F}_{nk}(x)\right]=\sum_{k=1}^{k_n}\ln\varphi_{nk}(t)$$

Untuk $n\to\infty$ secara seragam ke setiap interval-t hingga, diperoleh:

$$\sum^{k_n}\left[it\alpha_{nk}+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)d\widetilde{F}_{nk}(x)\right]\to\psi(t)$$

Misalkan

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{k_n}\left[\alpha_{nk}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}(x+\alpha_{nk})\right],$$

(3)

dengan F_{nk} adalah fungsi distribusi dari X_{nk}. Melalui pembuktian teorema 2 bagian akhir, disimpulkan bahwa $G_n \xrightarrow{c} G$ dan $\alpha_n \to \alpha$, untuk $n \to \infty$.

Selanjutnya dari teorema perluasan Helly-Bray, $\psi_n \to \psi$ dimana $\psi_n(t)$ seperti pada (2), yaitu

$$\psi_n(t) = it\alpha_n + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG_n(x)$$

$$= it\sum_{k=1}^{k_n}\alpha_{nk} + it\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}d\widetilde{F}_{nk}(x) + \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\left(\sum_{k=1}^{k_n}\frac{x^2}{1+x^2}\right)d\widetilde{F}_{nk}(x)$$

$$= it\sum_{k=1}^{k_n}\alpha_{nk} + \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx} - 1)d\widetilde{F}_{nk}(x)$$

Karena $G_n \xrightarrow{c} G$ dan $\alpha_n \to \alpha$, maka kondisi dari teorema 7 terpenuhi, dan disimpulkan bahwa $\prod_{k=1}^{k_n}\varphi_{nk} \to e^{\psi}$ untuk $n \to \infty$.

Berdasarkan teorema perluasan Helly-Bray, akan ditunjukkan bahwa $G_n \xrightarrow{c} G$ ekivalen dengan bentuk-bentuk berikut;

$$\left.\begin{array}{c} G_n(x) \to G(x),\ x < 0 \\ G_n(\infty) - G_n(x) \to G(\infty) - G(x),\ x > 0 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\sup[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)] = G(0) - G(-0) \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\inf[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)] = G(0) - G(-0) \end{array}\right\} \quad (4)$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\sup[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)]$ dinotasikan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)]$ dan

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\inf[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)]$ dinotasikan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\underline{\lim}_{n\to\infty}[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)]$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)] = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\underline{\lim}_{n\to\infty}[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)]$,

Dinotasikan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)]$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{k_n}\widetilde{F}_{nk}(x) \to \int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y),\ untuk\ x < 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{k_n}\left[1 - \widetilde{F}_{nk}(x)\right] \to \int_{x}^{\infty}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y),\ untuk\ x > 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Untuk x titik kontinu dari G.

$$\left[\lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\to\infty}}[G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)] = G(+0) - G(-0)\right] \quad (6)$$

Misalkan $\beta_n = \max\limits_{1\le k\le k_n}\int_{|x|<y}|x|d\widetilde{F}_{nk}(x)$ .karena $\{X_{nk}\}$ barisan infinitesimal, maka $\max\limits_{1\le k\le k_n}|\alpha_{nk}| \le \beta_{n\to 0}$, untuk $n \to \infty$. Selain itu,untuk setiap $x \in \Re$

$$\sum_{k=1}^{k_n}F_{nk}(x - \beta_n) \le \sum_{k=1}^{k_n}\widetilde{F}_{nk}(x) \le \sum_{k=1}^{k_n}F_{nk}(x + \beta_n)$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\widetilde{F}_{nk}(x - \beta_n) \le \sum_{k=1}^{k_n}F_{nk}(x) \le \sum_{k=1}^{k_n}\widetilde{F}_{nk}(x + \beta_n)$$

Selanjutnya, ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Jika x< 0, $x \pm \varepsilon$ titik kontinu negatif dari G maka dari (5) diperoleh:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n} \widetilde{F}_{nk}(x+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \ge \underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \widetilde{F}_{nk}(x-\varepsilon) = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$$

Dengan memperoleh $\varepsilon \to 0$, didapat: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$.

Untuk titik-titik x > 0, $x \pm \varepsilon$ titik-titik kontinu positif dari G maka dari (5) diperoleh:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n} [1 - F_{nk}(x)] \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n} [1 - \widetilde{F}_{nk}(x+\varepsilon)] = \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} [1 - F_{nk}(x)] \ge \underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} [1 - \widetilde{F}_{nk}(x-\varepsilon)] = \int_{x-\varepsilon}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$$

Dan dengan mengambil $\varepsilon \to 0$, diperoleh: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} [1 - F_{nk}(x)] = \int_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$.

Kemudian, jika x < 0, untuk sebarang $\varepsilon > 0$, $x \pm \varepsilon$ adalah titik-titik kontinu negative dari G, maka

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n} \widetilde{F}_{nk}(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \widetilde{F}_{nk}(x) \ge \underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x-\varepsilon) = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$$

Dengan mengambil $\varepsilon \to 0$, diperoleh: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} [1 - \widetilde{F}_{nk}(x)] = \int_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$.

Dari uraian di atas didapat satu lagi bentuk ekivalen, yaitu:

$$\sum_{k=1}^{k_n} \widetilde{F}_{nk}(x) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), \quad \textit{untuk} \quad x < 0$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} [1 - \widetilde{F}_{nk}(x)] \to \int_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), \quad \textit{untuk} \quad x > 0$$

ekivalen dengan

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), \ \textit{untuk} \ \ x < 0 \\ \sum_{k=1}^{k_n} [1 - F_{nk}(x)] \to \int_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), \ \textit{untuk} \ \ x > 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Selanjutnya untuk sebarang $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} x^2 d\widetilde{F}_{nk}(x) \le \sum_{k=1}^{k_n}\frac{x^2}{1+x^2}d\widetilde{F}_{nk}(x) \le \sum_{k=1}^{k_n} x^2 d\widetilde{F}_{nk}(x)$$

Untuk $\varepsilon \to 0^+$, diperoleh:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{1+x^2}{x^2}d\widetilde{F}_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} x^2 d\widetilde{F}_{nk}(x)$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} x^2 d\widetilde{F}_{nk}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\sum_{k=1}^{k_n}\widetilde{F}_{nk}(x)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{1+x^2}{x^2}\frac{x^2}{1+x^2}dG_n(x)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} dG_n(x)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\left[G_n(\varepsilon)-G_n(-\varepsilon)\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[G_n(\varepsilon)-G_n(-\varepsilon)\right]\\
&= G(+0)-G(-0)
\end{aligned}$$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} x^2 d\widetilde{F}_{nk}(x)$ ekivalen dengan $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\left[G_n(\varepsilon)-G_n(-\varepsilon)\right] = G(+0)-G(-0)$

Selanjutnya, perhatikan:

$$J_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{|x|<\varepsilon} x^2\, d\widetilde{F}_{nk}(x) - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x)\right)^2\right]\right|$$

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} J_n(\varepsilon) = 0$ dengan $\varepsilon > 0$.

Kita mempunyai $|\alpha_{nk}| \le \beta_n \to 0, n \to \infty$. Untuk $0 < \varepsilon < \gamma$.

$$\left| \int_{|x|<\varepsilon} x^2 d\widetilde{F}_{nk}(x) - \int_{|x|<\varepsilon} (x-\alpha_{nk})^2 dF_{nk}(x) \right| = \left| \int_{|x-\alpha_{nk}|<\varepsilon} (x-\alpha_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \int_{|x|<\varepsilon} (x-\alpha_{nk})^2 dF_{nk}(x) \right|$$

$$= \left| \int_{|x-\alpha_{nk}|<\varepsilon\leq|x|} (x-\alpha_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \int_{|x|<\varepsilon\leq|x-\alpha_{nk}|} (x-\alpha_{nk})^2 dF_{nk}(x) \right| \text{Dan}$$

$$= \varepsilon^2 \int_{\varepsilon\leq|x|\leq\varepsilon+|\alpha_{nk}|} dF_{nk}(x) + \int_{\varepsilon-|\alpha_{nk}|\leq|x|<\varepsilon} \left(\varepsilon+|\alpha_{nk}|^2\right) dF_{nk}(x)$$

$$= (\varepsilon+\beta_n)^2 \int_{\varepsilon-\beta_n\leq|x|\leq\varepsilon+\beta_n} dF_{nk}(x)$$

$$\left| \int_{|x|<\varepsilon} (x-\alpha_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right|$$

$$= \left| \int_{|x|<\varepsilon} (-2\alpha_{nk}x) + \alpha_{nk}^2) dF_{nk}(x) + \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right|$$

$$= \left| \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) - \alpha_{nk} \right)^2 - \alpha_{nk}^2 \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \right|$$

$$= \left| \left(\int_{\varepsilon\leq|x|<\gamma} x dF_{nk}(x) \right)^2 - \alpha_{nk}^2 \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \right|$$

$$\leq \beta_n \int_{\varepsilon\leq|x|<\gamma} dF_{nk}(x) + \beta_{nk}^2 \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x)$$

$$\leq \beta_n(\beta_n+\gamma) \int_{|x|\leq\varepsilon} dF_{nk}(x)$$

Maka,

$$\lim_{n\to\infty} J_n(\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon-\beta_n\leq|x|\leq\varepsilon+\beta_n} (\varepsilon+\beta_n)^2 dF_{nk}(x) + \beta_n(\beta_n+\gamma) \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) = 0$$

Dengan

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(-\varepsilon) + \sum_{k=1}^{k_n} [1 - F_{nk}(-\varepsilon)]$$

$$\to \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) < \infty$$

Karena pilih $\eta \in (0,\varepsilon)$, dimana $\pm\varepsilon$, $\varepsilon \pm \eta$ titik-titik kontinu dari G dan $\beta_n < \eta$ untuk $n \geq N_\eta$,

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\varepsilon-\beta_n\leq|x|\leq\varepsilon+\beta_n} dF_{nk}(x)\leq\sum_{k=1}^{k_n}\int_{(\varepsilon-\eta)\leq|x|\leq(\varepsilon+\eta)} dF_{nk}(x)\\ \to\int_{(\varepsilon-\eta)\leq|x|\leq(\varepsilon+\eta)}\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)=0,\ untuk\,\eta\to 0\end{array}\right\}\quad(8)$$

Kemudian, karena untuk setiap k,

$$\left|\int_{|x|<\gamma} x d\widetilde{F}_{nk}(x)\right|=\left|\int_{|x-\alpha_{nk}|<\gamma}(x-\alpha_{nk})dF_{nk}(x)\right|$$

$$=\left|\int_{|x-\alpha_{nk}|<\gamma}(x-\alpha_{nk})dF_{nk}(x)-\int_{|x|<\gamma}(x-\alpha_{nk})dF_{nk}(x)+\alpha_{nk}\int_{|x|\geq\gamma}dF_{nk}(x)\right|$$

$$\leq\left|\int_{|x-\alpha_{nk}|<\gamma\leq|x|}(x-\alpha_{nk})dF_{nk}(x)-\int_{|x|<\gamma\leq|x-\alpha_{nk}|}(x-\alpha_{nk})dF_{nk}(x)+|\alpha_{nk}|\int_{|x|\geq\gamma}dF_{nk}(x)\right|$$

$$\leq\gamma\int_{|x-\alpha_{nk}|<\gamma\leq|x|}(x-\alpha_{nk})dF_{nk}(x)+(\gamma+|\alpha_{nk}|)\int_{\gamma-\alpha_{nk}\leq|x|<\gamma}(x-\alpha_{nk})dF_{nk}(x)+|\alpha_{nk}|\int_{|x|\geq\gamma}dF_{nk}(x)$$

$$\leq\int_{|x-\alpha_{nk}|<\gamma\leq|x|}(2\gamma+\beta_n)dF_{nk}(x)+\beta_n\int_{|x|\geq\gamma}dF_{nk}(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\gamma}x d\widetilde{F}_{nk}(x)\right|\leq\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\gamma-\beta_n\leq|x|\gamma+\beta_n}(2\gamma+\beta_n)dF_{nk}(x)+\beta_n\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geq\gamma}dF_{nk}(x)=0$$

melalui (8).
Misalkan $\pm\gamma$ titik-titik kontinu dari G, Maka

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}d\widetilde{F}_{nk}=\sum_{k=1}^{k_n}\left(\int_{|x|<\gamma}x d\widetilde{F}_{nk}(x)-\int_{|x|<\lambda}\frac{x^2}{1+x^2}d\widetilde{F}_{nk}(x)+\int_{|x|\geq\gamma}\frac{x}{1+x^2}d\widetilde{F}_{nk}(x)\right)$$

$$=0-\int_{|x|<\gamma}x dG_n(x)+\int_{|x|\geq\gamma}x^{-1}dG_n(x)$$

Jadi, diperoleh bahwa jika $\{X_n\},1\leq k\leq k_n,n\geq 1$ merupakan barisan infinitesimal yang memenuhi kondisi 1, maka jumlah barisan tersebut konvergen dalam distribusi ke suatu variabel acak dengan fungsi karakteristik e^{ψ} dimana

$$\psi(t)=\ln\varphi(t)=i\alpha t+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right\}\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)$$

jika dan hanya jika ketiga kondisi berikut dipenuhi, yaitu: untuk setiap titik kontinu x $(x\neq 0)$ dari G,

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}F_{nk}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y),\quad untuk\quad x<0\ dan\\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}[1-F_{nk}(x)]=\int_{x}^{\infty}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y)\quad untuk\quad x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ \qquad=G(0)-G(-0)\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\}\end{cases}$$

ISSN: 2085-8019

Untuk setiap $\gamma > 0$ yang telah ditetapkan sehingga $\pm\gamma$ merupakan titik-titik kontinu dari G,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\gamma} x\,dF_{nk}(x) = \alpha + \int_{|x|<\gamma} x\,dG(x) - \int_{|x|\geq\gamma} x^{-1}\,dG(x)$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan didapat suatu kesimpulan, yaitu $\{X_{nk}\}, 1 \leq k \leq k_n,\ n \geq 1$ merupakan barisan infinitesimal memenuhi kondisi 1, maka jumlah barisan tersebut konvergen dalam distribusi ke suatu variabel acak dengan fungsi karakteristik e^{ψ} dimana

$$\psi(t) = \ln\varphi(t) = it\alpha + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right\}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)$$

jika dan hanya jika ketiga kondisi berikut dipenuhi, yaitu: untuk setiap titik kontinu x $(x \neq 0)$ dari G,

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}\,dG(y), & \text{untuk } x<0 \text{ dan} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}[1 - F_{nk}(x)] = \int_{x}^{\infty}\frac{1+y^2}{y^2}\,dG(y) & \text{untuk } x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\} \\ \qquad = G(0) - G(-0) \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\} \end{cases}$$

Untuk setiap $\gamma > 0$ yang telah ditetapkan sehingga $\pm\gamma$ merupakan titik-titik kontinu dari G,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\gamma} x\,dF_{nk}(x) = \alpha + \int_{|x|<\gamma} x\,dG(x) - \int_{|x|\geq\gamma} x^{-1}\,dG(x)$$

DAFTAR PUSTAKA

Bhat B, Ramdas. 1981. *Modern Probability Theory*. Wiley Eastern Limited: New Delhi.

Chow YS, Teicher.1988. *Probability Theory*. Springer_Verlag: New York.

Dudewicz EJ, Mishra, SN. 1995. *Statistika Mađematika Modern*. ITB: Bandung.

Freund's JE. 1999. *Mathematical Statistics*. Sultan Chand & Sons: New Delhi.

Gupta SC, Kapoor VK. 1982.*Fundaentals of Mathematicals Statistics*. Sultan Chand & Sons: New Delhi.

Syafriandi M, Putra AA. 1999. *Statistika Dasar*. Universitas Negeri Padang: Padang.

Laha RG, Rohatgi VK. 1979. *Probability Theory*. John Willey & Sons: New York